

On Twin Edge Colorings of Finite 2-Dimensional Grids

Huan Yang^a, Shuang Liang Tian^{b,*}, Xia Hong Cai^c and Su Su Jiao^d

Northwest Minzu University, College of Mathematics and Computer Science, Lanzhou, Gansu, China

^ayanghuan082@126.com, ^bsl_tian@163.com, ^c1850697869@qq.com, ^d1226062170@qq.com

*Corresponding author

Keywords: Twin edge coloring, Twin chromatic number, Finite 2-dimensional grids.

Abstract. Let σ be a proper edge coloring of a connected graph G of order at least 3, where the color set is $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. If σ can induce a proper vertex coloring of G , then σ is called a twin edge k -coloring of G . The minimum number of colors for which G has a twin edge coloring is called the twin chromatic index of G . In this paper, twin edge colorings of finite 2-dimensional grids are studied, and its twin chromatic number is obtained.

有限2-维网格的孪生边染色

杨环^a, 田双亮^{b,*}, 蔡侠红^c, 焦素素^d

西北民族大学数学与计算机科学学院, 兰州, 甘肃, 中国

^ayanghuan082@126.com, ^bsl_tian@163.com, ^c1850697869@qq.com, ^d1226062170@qq.com

*通讯作者

关键词: 有限2-维网格; 孪生边染色; 孪生边染色数

中文摘要. 设 σ 是一个阶至少为3的连通图 G 的 k -正常边染色, 其中颜色集合为 $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. 若 σ 能够诱导一个 G 的正常点染色, 则称 σ 是 G 的孪生 k -边染色. 最少的 k 值为 G 的孪生边染色数, 记为 $\chi'_t(G)$. 本文研究了有限2-维网格 $G(n, m)$ 的孪生边染色, 得到了相应的染色数.

1 引言

设 G 为简单连通图, 分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示 G 的顶点集和边集, 并用 $\Delta(G)$ 表示 G 的最大度, $d(v)$ 和 E_v 分别表示顶点 v 的度和 v 的所有关联边构成的集合.

Andrews 在文献 [1] 中提出了孪生边染色的概念, 并得到关于路、圈、完全图以及完全二部图的孪生边染色数. 所谓简单图 G 的孪生 k -边染色 σ 是指其诱导的点染色 σ' 是 G 的正常点染色的正常 k -边染色, 其中 σ 的颜色集合为 $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, 且对任意 $u \in V(G)$, $\sigma'(u) = (\sum_{uv \in E_v} \sigma(uv)) \bmod k$, 最少的 k 值为 G 的孪生边染色数, 记为 $\chi'_t(G)$.

由孪生边染色概念, 显然以下引理成立.

引理1.1 若 G 是阶至少为3且存在相邻最大度点的简单连通图, 则 $\chi'_t(G) \geq \Delta(G) + 1$.

与孪生边染色密切相关的染色概念是邻点可区别边染色^[2], 其中图 G 的邻点可区别边染色是指 G 的任意相邻顶点具有不同色集的正常边染色, 所用颜色数最少的值称为邻点可区别边染色数, 记为 $\chi'_a(G)$.

由邻点可区别边染色与孪生边染色概念可知，图 G 的任一 k -孪生边染色一定是 G 的一个 k -邻点可区别边染色，但反之不一定成立，如3-阶路的2-邻点可区别边染色不是其孪生2-边染色。因此，对阶至少为3的简单连通图 G ，有 $\chi'_a(G) \leq \chi'_l(G)$ 。

Baril等在文献[2]中研究了多维网格图和超立方体的邻点可区别边染色，结果表明：多维网格图和超立方体的邻点可区别边色数均等于它们的最大度加1。另外，Zhang在文献[3]中提出了邻点可区别边色数猜想“设 G 是阶至少为3的简单图，且 $G \neq C_5$ ，则 $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$ 。”，并验证了路、圈、树、完全图、完全二部图等特殊图类满足此猜想。Balister和Gyori等人在文献[4]中验证了对所有的二部图和最大度为3的图都满足此猜想。Dai和Bu在文献[5]中给出了邻点可区别边染色的一个上界：任意简单连通图 G 的邻点可区别边色数不超过 $3\Delta(G) - 1$ 。Zhang和Lin在文献[6]中将此上界改进为 $\frac{5}{2}(\Delta(G) + 2)$ 。Bu等在文献[7]中证明了围长至少为6的无孤立边的平面图的邻点可区别边色数不超过 $\Delta(G) + 2$ 。严丞超等在文献[8]中证明了围长至少为4且最大度至少为6的平面图 G 的邻点可区别边色数不超过 $\Delta(G) + 2$ 。更多的相关结果见文献[9-14]。

本文主要研究有限2-维网格 $G(n, m)$ 的孪生边染色，其中 $G(n, m)$ 是指具有顶点集 $\{0, 1, \dots, n-1\} \times \{0, 1, \dots, m-1\}$ 的图，且顶点 (x, y) 与 (x', y') 相邻当且仅当 $x = x'$ 且 $|y - y'| = 1$ ，或 $y = y'$ 且 $|x - x'| = 1$ 。文中未说明的符号和术语参见[15、16]。

2 主要结果及证明

设 $n, m \geq 2$ ，关于 $G(n, m)$ 的孪生边色数，有以下结果：

定理2.1 若 $m = n = 2$ ， $m = n = 3$ ，或 $m = 2$ 且 $n \geq 3$ ，则 $\chi'_l(G(n, m)) = 4$ 。

证明 若 $m = n = 2$ ，则 $G(n, m)$ 为4-阶圈，显然， $\chi'_l(G(n, m)) = 4$ 。若 $m = n = 3$ ，或 $m = 2$ 且 $n \geq 3$ ，则分以下两种情况进行讨论。

情况1 $m = n = 3$ 。显然， $\chi'_l(G(3, 3)) \geq 4$ ，所以仅需构造 $G(3, 3)$ 的一个4-孪生边染色。

设颜色集合为 $\{0, 1, 2, 3\}$ 。并令 $u_1 = (0, 0)$ ， $u_2 = (1, 0)$ ， $u_3 = (2, 0)$ ， $u_4 = (0, 1)$ ， $u_5 = (1, 1)$ ， $u_6 = (2, 1)$ ， $u_7 = (0, 2)$ ， $u_8 = (1, 2)$ ， $u_9 = (2, 2)$ 。构造 $G(3, 3)$ 的染色 σ ，显然， $\sigma'(u_1) = 1$ ， $\sigma'(u_2) = 0$ ， $\sigma'(u_3) = 1$ ， $\sigma'(u_4) = 0$ ， $\sigma'(u_5) = 2$ ， $\sigma'(u_6) = 3$ ， $\sigma'(u_7) = 1$ ， $\sigma'(u_8) = 3$ ， $\sigma'(u_9) = 1$ 。容易验证， σ' 是 $G(3, 3)$ 的一个4-孪生边染色。因此， $\chi'_l(G(3, 3)) = 4$ 。

情况2 $m = 2$ 且 $n \geq 3$ 。由引理1.1， $\chi'_l(G(n, 2)) \geq 4$ 。为证明 $\chi'_l(G(n, 2)) \leq 4$ ，现在构造 $G(n, 2)$ 的一个4-孪生边染色。

设颜色集合为 $\{0, 1, 2, 3\}$ ，并对 $x = 0, 1, \dots, n-1$ ， $y = 0, 1$ ，令

$$\sigma((x, 0)(x, 1)) = 0, \quad \sigma((x, y)(x+1, y)) = 1 + (x + y + 1)_3.$$

显然， σ 所用的颜色数是4。

首先，证明 σ 是 $G(n, 2)$ 的正常边染色。对 $G(n, 2)$ 的顶点 $(x, 0)$ ， $x = 0, 1, \dots, n-1$ ，由 σ 的定义，可知该顶点的可能关联边的颜色为

$$\sigma((x-1, 0)(x, 0)) = 1 + (x)_3, \quad \sigma((x, 0)(x+1, 0)) = 1 + (x+1)_3, \quad \sigma((x, 0)(x, 1)) = 0.$$

因 $\sigma((x-1, 0)(x, 0)) \in \{1, 2, 3\}$ ， $\sigma((x, 0)(x+1, 0)) \in \{1, 2, 3\}$ ，所以， $\sigma((x-1, 0)(x, 0)) \neq \sigma((x, 0)(x, 1))$ ， $\sigma((x, 0)(x+1, 0)) \neq \sigma((x, 0)(x, 1))$ 。若 $\sigma((x-1, 0)(x, 0)) = \sigma((x, 0)(x+1, 0))$ ，则 $1 + (x)_3 = 1 + (x+1)_3$ ，即 $(0)_3 = (1)_3$ ，这是不可能的。因此， $(x, 0)$ 的不同关联边具有不同的颜色。类似地，对任一点 $(x, 1)$ ，其所有可能关联边也具有不同的颜色。由以上分析可知， σ 是 $G(n, 2)$ 的正常边染色。

其次，证明由 σ 诱导的 $G(n, 2)$ 的点染色 σ' 是正常的。任取 $G(n, 2)$ 的一个顶点 (x, y) ，分以下两种情况讨论 σ' 是 $G(n, 2)$ 的正常点染色。

假设 $y=0$. 由 σ 及 σ' 的定义, 顶点 $(0,0)$ 及其邻点的颜色与 $(n-1,0)$ 及其邻点的颜色分别为

$$\begin{aligned}\sigma'(0,0) &= 2, \quad \sigma'(1,0) = 1, \quad \sigma'(0,1) = 3, \quad \sigma'(n-1,0) = (1+(n-1)_3)_4, \\ \sigma'(n-2,0) &= (2+(n-2)_3+(n-1)_3)_4, \quad \sigma'(n-1,1) = (1+(n)_3)_4;\end{aligned}$$

显然, $(0,0)$ 与其邻点具有不同的颜色. 假设 $\sigma'(n-1,0) = \sigma'(n-2,0)$, 则 $0 = (1+(n+1)_3)_4$, 这是不可能的, 因为 $1 \leq 1+(n+1)_3 \leq 3$. 假设 $\sigma'(n-1,0) = \sigma'(n-1,1)$, 则可导出矛盾 $2=0$. 因此, $(n-1,0)$ 与其邻点具有不同的颜色.

对顶点 $(x,0)$, $x=1,2,\dots,n-2$, 由 σ 及 σ' 的定义, $(x,0)$ 及其邻点的颜色分别为

$$\begin{aligned}\sigma'(x,0) &= (2+(x)_3+(x+1)_3)_4, \quad \sigma'(x-1,0) = (2+(x-1)_3+(x)_3)_4, \\ \sigma'(x+1,0) &= (2+(x+1)_3+(x+2)_3)_4, \quad \sigma'(x,1) = (2+(x+1)_3+(x+2)_3)_4.\end{aligned}$$

假设 $\sigma'(x,0) = \sigma'(x-1,0)$, 或 $\sigma'(x,0) = \sigma'(x+1,0)$, 或 $\sigma'(x,0) = \sigma'(x,1)$, 则可导出矛盾 $1=2$ 或 $0=2$. 因此, $(x,0)$ 与其邻点具有不同的颜色.

假设 $y=1$. 与 $y=0$ 的情形类似, 顶点 $(0,1)$ 及其邻点的颜色与 $(n-1,1)$ 及其邻点的颜色分别为

$$\begin{aligned}\sigma'(0,1) &= 3, \quad \sigma'(1,1) = 0, \quad \sigma'(0,0) = 2, \quad \sigma'(n-1,1) = (1+(n)_3)_4, \\ \sigma'(n-2,1) &= (2+(n-1)_3+(n)_3)_4, \quad \sigma'(n-1,0) = (1+(n-1)_3)_4.\end{aligned}$$

显然, $(0,1)$ 与其邻点具有不同的颜色. 假设 $\sigma'(n-1,1) = \sigma'(n-2,1)$ 或 $\sigma'(n-1,1) = \sigma'(n-1,0)$, 则可导出矛盾 $0 = (1+(n+2)_3)_4$ 或 $0=2$. 因此, $(n-1,1)$ 与其邻点具有不同的颜色.

对顶点 $(x,1)$, $x=1,2,\dots,n-2$, 由 σ 及 σ' 的定义, $(x,1)$ 及其邻点的颜色分别为

$$\begin{aligned}\sigma'(x,1) &= (2+(x+1)_3+(x+2)_3)_4, \quad \sigma'(x-1,1) = (2+(x)_3+(x+1)_3)_4, \\ \sigma'(x+1,1) &= (2+(x+2)_3+(x)_3)_4, \quad \sigma'(x,0) = (2+(x)_3+(x+1)_3)_4.\end{aligned}$$

假设 $\sigma'(x,1) = \sigma'(x-1,1)$, 或 $\sigma'(x,1) = \sigma'(x,0)$, 或 $\sigma'(x,1) = \sigma'(x+1,1)$, 则可导出矛盾 $2=0$ 或 $1=2$. 因此, $(x,1)$ 与其邻点具有不同的颜色.

由以上分析, σ' 是 $G(n,2)$ 的正常点染色. □

定理2.2 设任意整数 $n, m \geq 3$, 且满足 $(n)_3 = 2$ 或 $(m)_3 = 2$, 则 $\chi'_t(G(n, m)) = 5$.

证明 因 $G(n, m) \cong G(m, n)$, 所以不妨假设 $(n)_3 = 2$. 由引理1.1, $\chi'_t(G(n, m)) \geq 5$, 所以仅需构造 $G(n, m)$ 的一个5-孪生边染色.

设颜色集合为 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, 并对 $x=0, 1, \dots, n-1$, $y=0, 1, \dots, m-1$, 令

$$\sigma((x, y)(x, y+1)) = (y+1)_2, \quad \sigma((x, y)(x+1, y)) = 2+(x-(y)_2)_3.$$

显然, σ 所用的颜色数是5.

首先, 证明 σ 为 $G(n, m)$ 的正常边染色. 由 σ 的定义可知, $G(n, m)$ 任一顶点 (x, y) 的所有可能关联边的颜色为

$$\begin{aligned}\sigma((x, y)(x+1, y)) &= 2+(x-(y)_2)_3, \quad \sigma((x, y)(x, y+1)) = (y+1)_2, \\ \sigma((x-1, y)(x, y)) &= 2+(x-(y)_2-1)_3, \quad \sigma((x, y-1)(x, y)) = (y)_2.\end{aligned}$$

显然, $\{\sigma((x, y)(x+1, y)), \sigma((x-1, y)(x, y))\} \cap \{\sigma((x, y)(x, y+1)), \sigma((x, y-1)(x, y))\} = \emptyset$, 且 $\sigma((x, y)(x, y+1)) \neq \sigma((x, y-1)(x, y))$. 假设 $\sigma((x, y)(x+1, y)) = \sigma((x-1, y)(x, y))$, 则导出矛盾 $0=2$. 因此, (x, y) 的不同关联边具有不同的颜色, 即 σ 是 $G(n, m)$ 的正常边染色.

其次, 证明由 σ 诱导的 $G(n, m)$ 的点染色 σ' 是正常的. 任取 $G(n, m)$ 的两个相邻顶点 u 与 v , 不妨设 $u = (x, y)$ 且 $d(u) \leq d(v)$, 其中 $x=0, 1, \dots, n-1$, $y=0, 1, \dots, m-1$. 根据 $G(n, m)$ 的结构可知, $v = (x \pm 1, y)$ 或 $v = (x, y \pm 1)$. 现在需要证明 $\sigma'(u) \neq \sigma'(v)$, 考虑4种情况: (i) $d(u) = d(v) = 4$; (ii) $d(u) = 2$ 且 $d(v) = 3$; (iii) $d(u) = 3$ 且 $d(v) = 4$; (iv) $d(u) = d(v) = 3$.

情况1 $d(u) = d(v) = 4$. 由 σ 及 σ' 的定义, 有

$$\sigma'(u) = \sigma'(x, y) = (x-(y)_2+2)_3 + (x-(y)_2)_3 \quad (1)$$

当 $v = (x \pm 1, y)$ 时, 由公式 (1) 可知,

$$\sigma'(v) = \sigma'(x \pm 1, y) = (x \pm 1 - (y)_2 + 1)_3 + (x \pm 1 - (y)_2)_3.$$

假设 $\sigma'(u) = \sigma'(v)$ ，则产生矛盾 $2=1$ 或 $0=1$ 。因此， $\sigma'(u) \neq \sigma'(v)$ 。

类似地，当 $v = (x, y \pm 1)$ 时，由公式 (1) 可知，

$$\sigma'(v) = \sigma'(x, y \pm 1) = (x - (y \pm 1)_2 + 2)_3 + (x - (y \pm 1)_2)_3.$$

假设 $\sigma'(u) = \sigma'(v)$ ，则产生矛盾 $0=1$ 。因此， $\sigma'(u) \neq \sigma'(v)$ 。

情况 2 $d(u)=2$ 且 $d(v)=3$ 。则 $u=(0,0)$ ，或 $u=(n-1,0)$ ，或 $u=(0,m-1)$ ，或 $u=(n-1,m-1)$ 。

当 $u=(0,0)$ 时，由 σ 及 σ' 的定义，顶点 u 及其相邻点在 σ' 下的颜色分别为

$$\sigma'(0,0)=3, \quad \sigma'(1,0)=1, \quad \sigma'(0,1)=0.$$

显然， u 与其相邻顶点具有不同颜色。

当 $u=(n-1,0)$ 时，由 σ 及 σ' 的定义，顶点 u 及其相邻点在 σ' 下的颜色分别为

$$\sigma'(n-1,0) = (3 + (n+1)_3)_5, \quad \sigma'(n-2,0) = ((n)_3 + (n+1)_3)_5, \quad \sigma'(n-1,1) = (3 + (n)_3)_5.$$

假设 $\sigma'(n-1,0) = \sigma'(n-2,0)$ ，则可导出矛盾 $3 = (n)_3$ ；假设 $\sigma'(n-1,0) = \sigma'(n-1,1)$ ，则可导出矛盾 $1=0$ 。

当 $u=(0,m-1)$ 时，由 σ 及 σ' 的定义，顶点 u 及其相邻点在 σ' 下的颜色分别为

$$\sigma'(0,m-1) = (2 + (m+1)_2 + (-(m+1)_2)_3)_5, \quad \sigma'(0,m-2) = (3 + (-(m)_2)_3)_5,$$

$$\sigma'(1,m-1) = (4 + (m+1)_2 + (-(m+1)_2)_3 + (1 - (m+1)_2)_3)_5.$$

假设 $\sigma'(0,m-1) = \sigma'(1,m-1)$ ，则 $0 = 2 + (1 - (m+1)_2)_3$ ，这是不可能的，因为该等式右端至少为 2；假设 $\sigma'(0,m-1) = \sigma'(0,m-2)$ ，则 $(m+1)_2 + (-(m+1)_2)_3 = 1 + (-(m)_2)_3$ ，当 m 为奇数时，则可产生矛盾 $0=3$ ；当 m 为偶数时，则可产生矛盾 $3=1$ 。

当 $u=(n-1,m-1)$ 时，由 σ 及 σ' 的定义，顶点 u 及其相邻点在 σ' 下的颜色分别为

$$\sigma'(n-1,m-1) = (2 + (m+1)_2 + (n+1 - (m+1)_2)_3)_5, \quad \sigma'(n-1,m-2) = (3 + (n+1 - (m)_2)_3)_5,$$

$$\sigma'(n-2,m-1) = (4 + (m+1)_2 + (n - (m+1)_2)_3 + (n+1 - (m+1)_2)_3)_5.$$

假设 $\sigma'(n-1,m-1) = \sigma'(n-2,m-1)$ ，则 $(m+1)_2 + (n+1 - (m+1)_2)_3 = 1 + (n+1 - (m)_2)_3$ ，当 m 为偶数时，则可产生矛盾 $0=1$ ；当 m 为奇数时，则有 $(n+1)_3 = 1 + (n)_3$ ，即 $(n)_3 \neq 2$ ，这与条件 $(n)_3 = 2$ 矛盾。

由以上分析知， u 与 v 具有不同颜色，即 $\sigma'(u) \neq \sigma'(v)$ 。

情况 3 $d(u)=3$ 且 $d(v)=4$ 。则 $u=(x,0)$ ，或 $u=(n-1,y)$ ，或 $u=(x,m-1)$ ，或 $u=(0,y)$ 。

当 $u=(x,0)$ 时，由 σ 及 σ' 的定义，顶点 u 及其相邻点在 σ' 下的颜色分别为

$$\sigma'(x,0) = ((x)_3 + (x+2)_3)_5, \quad \sigma'(x,1) = ((x+1)_3 + (x+2)_3)_5.$$

假设 $\sigma'(x,0) = \sigma'(x,1)$ ，则可导出矛盾 $0=1$ 。

当 $u=(n-1,y)$ 时，由 σ 及 σ' 的定义，顶点 u 及其相邻点在 σ' 下的颜色分别为

$$\sigma'(n-1,y) = (3 + (n+1 - (y)_2)_3)_5, \quad \sigma'(n-2,y) = ((n - (y)_2)_3 + (n+1 - (y)_2)_3)_5.$$

假设 $\sigma'(n-1,y) = \sigma'(n-2,y)$ ，则 $3 = (n - (y)_2)_3$ ，这是不可能的，因为等式右端的值不超过 2。

当 $u=(x,m-1)$ 时，由 σ 及 σ' 的定义，顶点 u 及其相邻点在 σ' 下的颜色分别为

$$\sigma'(x,m-1) = (4 + (m+1)_2 + (x+2 - (m+1)_2)_3 + (x - (m+1)_2)_3)_5,$$

$$\sigma'(x,m-2) = ((x+2 - (m)_2)_3 + (x - (m)_2)_3)_5.$$

假设 $\sigma'(x,m-1) = \sigma'(x,m-2)$ ，当 m 为偶数时，则有 $(x+1)_3 = (x)_3$ ，这会产生矛盾 $1=0$ ；当 m 为奇数时，则有 $(x)_3 = 1 + (x+1)_3$ ，这是不可能的。事实上，设 $(n)_3 = r$ ， $r=0,1,2$ ，则有 $r = 1 + (r+1)_3$ ，而此式无论 r 取 0，或 1，或 2 均不成立。

当 $u=(0,y)$ 时，由 σ 及 σ' 的定义，顶点 u 及其相邻点在 σ' 下的颜色分别为

$$\sigma'(0,y) = (3 + (-(y)_2)_3)_5, \quad \sigma'(1,y) = ((-y)_2)_3 + (1 - (y)_2)_3)_5.$$

假设 $\sigma'(0,y) = \sigma'(1,y)$ ，则 $3 = (1 - (y)_2)_3$ ，这是不可能的，因为该等式右端的值不超过 2。

由以上分析知， u 与 v 具有不同颜色，即 $\sigma'(u) \neq \sigma'(v)$ 。

情况4 $d(u) = d(v) = 3$. 则 $u = (x, 0)$, 或 $u = (n-1, y)$, 或 $u = (x, m-1)$, 或 $u = (0, y)$.

当 $u = (x, 0)$ 时, 由 σ 及 σ' 的定义, 顶点 u 及其相邻点在 σ' 下的颜色分别为

$$\sigma'(x, 0) = ((x)_3 + (x+2)_3)_5, \quad \sigma'(x-1, 0) = ((x+1)_3 + (x+2)_3)_5, \quad \sigma'(x+1, 0) = ((x)_3 + (x+1)_3)_5.$$

假设 $\sigma'(x, 0) = \sigma'(x-1, 0)$, 则可导出矛盾 $0=1$; 假设 $\sigma'(x, 0) = \sigma'(x+1, 0)$, 则可导出矛盾 $2=1$.

当 $u = (n-1, y)$ 时, 由 σ 及 σ' 的定义, 顶点 u 及其相邻点在 σ' 下的颜色分别为

$$\sigma'(n-1, y) = (3 + (n+1-(y)_2)_3)_5, \quad \sigma'(n-1, y-1) = \sigma'(n-1, y+1) = (3 + (n+1-(y+1)_2)_3)_5.$$

假设 $\sigma'(n-1, y) = \sigma'(n-1, y-1)$ 或 $\sigma'(n-1, y) = \sigma'(n-1, y+1)$, 则可导出矛盾 $0=1$.

当 $u = (x, m-1)$ 时, 由 σ 及 σ' 的定义, 顶点 u 及其相邻点在 σ' 下的颜色分别为

$$\sigma'(x, m-1) = (4 + (m+1)_2 + (x+2-(m+1)_2)_3 + (x-(m+1)_2)_3)_5,$$

$$\sigma'(x+1, m-1) = (4 + (m+1)_2 + (x-(m+1)_2)_3 + (x+1-(m+1)_2)_3)_5,$$

$$\sigma'(x-1, m-1) = (4 + (m+1)_2 + (x+1-(m+1)_2)_3 + (x+2-(m+1)_2)_3)_5.$$

假设 $\sigma'(x, m-1) = \sigma'(x+1, m-1)$, 则可导出矛盾 $2=1$; 假设 $\sigma'(x, m-1) = \sigma'(x-1, m-1)$, 则可导出矛盾 $0=1$.

当 $u = (0, y)$ 时, 由 σ 及 σ' 的定义, 顶点 u 及其相邻点在 σ' 下的颜色分别为

$$\sigma'(0, y) = (3 + (-(y)_2)_3)_5, \quad \sigma'(0, y-1) = \sigma'(0, y+1) = (3 + (-(y+1)_2)_3)_5.$$

假设 $\sigma'(0, y) = \sigma'(0, y-1)$ 或 $\sigma'(0, y) = \sigma'(0, y+1)$, 则可导出矛盾 $0=1$.

由以上分析知, u 与 v 具有不同的颜色, 即 $\sigma'(u) \neq \sigma'(v)$.

综上所述, σ' 是 $G(n, m)$ 的正常点染色. 因此, σ 是 $G(n, m)$ 的孪生边染色. \square

4. 结束语

因 $G(n, m)$ 中存在相邻的最大度点, 所以 $\chi'_l(G(n, m)) \geq \chi'_a(G(n, m)) \geq \Delta(G(n, m)) + 1$. 根据定理2.1与定理2.2的结果, 可得到以下结论: 若整数 $n, m \geq 3$ 满足 $(n)_3 = 2$ 或 $(m)_3 = 2$, 则

$$\chi'_l(G(n, m)) = \chi'_a(G(n, m)) = \Delta(G(n, m)) + 1.$$

致谢

本文为国家民委科研项目(14XBZ018), 西北民族大学科研创新团队(图论与智能计算)计划资助的阶段性成果之一.

References

- [1] A. Eric, L. Helenius, J. Daniel and V. Jonathon, On twin edge colorings of graphs, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, vol. 34, pp. 613-627, 2014.
- [2] J. L. Baril, H. Kheddouci and O. Togni, Adjacent vertex distinguishing edge-colorings of meshes and hypercubes, *Australasian Journal of Combinatorics*, vol. 35, pp. 89-102, 2006.
- [3] Z. Zhang, L. Liu and J. Wang, Adjacent strong edge coloring of graphs, *Applied Mathematics Letters*, vol. 15, pp. 623-626, 2002.
- [4] P. N. Balister, E. Gyo'ri, J. Lehel, and R. H. Schelp, Adjacent Vertex Distinguishing Edge-Colorings, *Siam Journal on Discrete Mathematics*, vol. 21, pp. 237-250, 2007.
- [5] Y. Dai and Y. Bu, An Upper On The Adjacent Vertex-Distinguishing Chromatic Number of Graph, *Mathematics in Economics*, vol. 26, pp. 107-110, 2009.

- [6] L. Zhang, W. Wang and K. W. Lih, An improved upper bound on the adjacent vertex distinguishing chromatic index of a graph, *Discrete Applied Mathematics*, vol.162, pp. 348-354, 2012.
- [7] Y. Bu, K. W. Lih and W. Wang, Adjacent vertex distinguishing edge-colorings of planar graphs with girth at least six, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, vol. 31, pp. 429-439, 2011.
- [8] C. C. Yan, D. J. Huang and W. F. Wang, Adjacent Vertex Distinguishing Edge-colorings of Planar Graphs with Girth at Least Four, *Journal of Mathematical Study*, vol. 45, pp. 331-341, 2012.
- [9] M. Axenovich, J. Harant and J. Przybyło, et al, A note on adjacent vertex distinguishing colorings of graphs, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 205, pp. 1-7, 2016.
- [10] S. L. Tian, P. Chen, Y. B. Shao and Wang Q, Adjacent vertex distinguishing edge-colorings and total-colorings of the Cartesian product of graphs, *Numerical Algebra, Control and Optimization*, vol. 4, pp. 49-58, 2014.
- [11] W. Wang and Y. Wang, Adjacent vertex distinguishing edge-colorings of graphs with smaller maximum average degree, *Journal of Combinatorial Optimization*, vol. 19, pp. 471-485, 2010.
- [12] M. Chen and X. Guo, Adjacent vertex-distinguishing edge and total chromatic numbers of hypercubes, *Information Processing Letters*, vol. 109, pp. 599-602, 2009.
- [13] H. Hocquard and M. Montassier, Adjacent vertex-distinguishing edge coloring of graphs with maximum degree Δ , *Journal of Combinatorial Optimization*, vol. 26, pp. 152-160, 2013.
- [14] W. Wang and Y. Wang, Adjacent vertex-distinguishing edge colorings of K_4 -minor free graphs, *Applied Mathematics Letters*, vol. 24, pp. 2034-2037, 2011.
- [15] R. Diestel, Graph theory, *Mathematical Gazette*, vol. 173, pp. 67-128, 2000.
- [16] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. Graph Theory with Applications, New York, American Elsevier, 1976.