Einstein Energy-Momentum Pseudotensor in Generalized Covariant Equation

Jia Guo[1, a], Weiwei Jiang[2, b] and Benchao Zhu[1, c]

[1]Hubei University of Medicine, Mathematics and Physics Department, Shiyan 442000, China

[2]Hubei Dongfeng Automobile Technician College, Shiyan 442000, China

[a]416355087@qq.com, [b]jww0507@163.comn, [c]31430166@qq.com

Keywords: Generalized covariant equation; Energy-momentum tensor; Pseudo tensor; Physical decomposition

Abstract. This paper first focused on the Einstein general covariance principle. By constructing the differential form energy-momentum conservation in the presence of gravitational field, the famous Einstein energy-momentum pseudo tensor is finally presented. And then, the properties, application range and limitation of the Einstein pseudo tensor of gravitational field are studied. In the second half of this paper, we briefly review the concrete application of the method of the physical decomposition of the gauge field in the gravitational field. According to the physical decomposition method of gravitational field, this paper gives some prospective discussion on the solution of Einstein energy-momentum pseudo tensor.

广义协变方程中的Einstein能动量赝张量

郭佳 [1,a]，蒋薇薇 [2,b]，朱本超 [1,c]

1.湖北医药学院，数理教研室，中国 湖北 十堰 442000

2.湖北东风汽车技师学院，中国 湖北 十堰 442000

[a]416355087 @qq.com, [b]jww0507@163.com, [c]31430166@qq.com

摘要：本文从 Einstein 广义协变性原理出发，通过构造引力场存在情形下能动量守恒微分形式，给出了著名的 Einstein 能动量赝张量。对该赝张量的性质，适用范围，局限性等进行了相关地研究。通过介绍最近几年逐步建立的规范场物理分解方法，简明扼要地对该方法在引力场中应用进行了回顾，结合引力场物理分解方法，本文并对 Einstein 能动量—赝张量的解决给出了一定的前瞻性讨论。

关键词：广义协变性方程；能动量张量；赝张量；物理分解

1. 引言

自 1915 年 Einstein 首次提出广义协变性原理，一百多年来，人们通过大量的实验，例如水星近点扰动，雷达回波延迟等验证了其理论的正确性。但是，这并不能表明 Einstein 提出的广义相对论完美. 自从该理论诞生以来，有一个一直被大家不能接受的地方，引力场不能完整地定义出张量性质的能—动量张量密度[1]。没有张量性质的能—动量张量密度，引出了引力场的一个重要结论，即引力场无法定域化研究[2]。本文从广义协变性方程出发，简短回顾 Einstein 能-动量赝张量的提出，最后结合当下一种流行的物理分解方法，探索解决这个问题的一种新的可能途径。

2. 广义协变方程

Einstein 基于 Galileo，Huygen，Newton，Bessel 等人用实验揭示了引力质量和惯性质量的等

价性，而得出 “在任意的一个引力场中的任一个时空点，我们都可以引进一个局域惯性参考系以至于，在足够小的一个时空点的领域中，自然中的物理规律和 Minkowski 空间中有相同的形式”，既是说，引力场可以由一个局域自由下落的参考系是等价的。等效原理可以表述为一下几点[1,2,3]：

1）所有的参考系在表述物理规律上应该是等价的。

2）表述物理规律的方程式应该是在黎曼四位空间中的张量形式。

3）表述物理规律的方程式应该在所有参考系中有相同的形式。

等效原理推广了引力的概念，并且暗示了有引力场的时空是弯曲的黎曼空间，引力场的物理效应可以通过黎曼空间的度规张量来体现。

重复 Einstein 协变方程的推导将是非常有意义的事情，在这里我们省略掉具体的推导，而只给出非常熟悉的结论[3]：

$$R_{pq}-\frac{1}{2}g_{pq}R=\kappa T_{pq} \qquad (1)$$

3. Einstein能动量赝张量

场论中的相关知识告诉我们,能动量守恒可以表述为一下的微分方程：

$$T_{i,k}^{k}=0 \qquad (2)$$

这里的 T_i^k 是一个在惯性系中对称的能动量张量，因而本来在广义相对论中应该有的能动量守恒的微分方程： $T_{i;k}^{k}=0$ 。在以上这个方程中其实没有给出真正的能动量守恒的信息，事实上可以把上式子重新写成：

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}T_i^k)}{\partial x^k}=K_i \qquad (3)$$

$$K_i=\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g_{kp}}{\partial x^k}T^{kp} \qquad (4)$$

很明显 K_i 不是一个一般的四维矢量，因而在一个局域的惯性系中，我们总是可以使得 K_i 在某个给定的时空点上为零，在这种情况下(3）式子很容易就退化到（2)，在一般情况下，$i=0$ 时 $K_i\neq 0$ 这样（3）就给不出物质的能量是守恒的。

Einstein 为了让能量守恒定律得到满足，他把引力的能量贡献也考虑了进去，于是引进一个量 t_i^k ，这样就有：

$$\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}(T_i^k+t_i^k)]=0 \qquad (5)$$

量 t_i^k 是度规张量的一阶微分的齐次二次函数，很显然它不是一个张量。在适当的选取一个坐标系时，我们可以使得 t_i^k 在某些特定的时空点为零。为了得到 t_i^k ，首先从协变方程出发 $R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R=8\pi T^{ik}$ ，并考虑 Bianchi 恒等式 $(R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R)_{;k}=0$ ，方程式（2）变成协变方程是一个很自然的结果，（4）可以写成：

$$K_i = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{,i}{}^{pq} T_{pq} \tag{6}$$

这里的 $g^{pq}{}_{,i} = \frac{\partial g^{pq}}{\partial x^i}$ ，运用方程式（5）可以消除（6）中的T_{ik},可以得到：

$$\begin{aligned} K_i &= -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}\, g^{pq}{}_{,i}[R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R] \\ &= -\frac{1}{16\pi}[\frac{\partial L}{\partial g^{pq}} g^{pq}{}_{,i} - \frac{\partial}{\partial x^k}(\frac{\partial L}{\partial g_{,k}{}^{pq}}) g^{pq}{}_{,i}] \\ &= -\frac{\partial(\sqrt{-g}\, t_i^k)}{\partial x^k} \end{aligned} \tag{7}$$

这里：

$$\sqrt{-g}\, t_i^k = \frac{1}{16\pi}(\delta_i^k L - \frac{\partial L}{\partial g_{,k}{}^{pq}} g^{pq}{}_{,i}) \tag{8}$$

而拉格朗日密度：

$$L = \sqrt{-g}\, g^{ik}(\Gamma_{ik}^p \Gamma_{pq}^q - \Gamma_{iq}^p \Gamma_{kp}^q) \tag{9}$$

4. Einstein能动量赝张量性质的讨论

很显然，t_i^k 是度规张量和其一阶微分的函数，当把（6）和（8）一起考虑时候就可以得到广义相对论中的能动量守恒定律：

$$\frac{\partial \theta_k^i}{\partial x^k} = 0 \tag{10}$$

$$\theta_k^i = \sqrt{-g}(T_i^k + t_i^k) = \vartheta_i^k + \upsilon_i^k \tag{11}$$

这里的 θ_k^i 是包含物质和引力场的总的能动量张量，当引进一个局域的惯性系时，引力部分的 υ_i^k 总是可以在一个任意给定的时空点上消除，一般情况下 ϑ_i^k 是物质和引力张量的函数，因此把 θ_k^i 分解成为物质和引力部分是相当任意的。从（11）中甚至可以完全消除物质部分，同时 θ_k^i 可以表示成仅为度规张量及其一阶，二阶导数的函数，如下：

$$\theta_k^i = \frac{\partial S_i^{kp}}{\partial x^p} \tag{12}$$

这里的 S_i^{kp} 是Tolman给出的：

$$S_i^{kl} = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial L}{\partial g_{,l}{}^{ip}} g^{kp} \tag{13}$$

对于 θ_k^i，Møller给出了一个更加有用的表达式，量 θ_k^i 满足（12）式等同地应该可以写成：

$$\theta_k^i = \frac{1}{16\pi}\frac{\partial h_i^{kp}}{\partial x^p} \tag{14}$$

这里地 $h_i^{kp} = -h_i^{pk}$ 和 h_i^{kp} 是度规及其一阶导数地函数，很容易可以证明：

$$h_i^{kp} = \frac{g_{in}}{\sqrt{-g}}[(-g)(g^{kn}g^{lm} - gg^{\ln kpkm})]_{,m} \tag{15}$$

如所考虑的物理系统是可以引进类笛卡儿坐标系 x^α 的，g_{ik} 足够快地向着一个确定地 η_{ik} 相等。取：

$$\eta_{ik} = diag(1,1,1,-1) \tag{16}$$

从（14）我们可以得到：

$$P_i = \iiint \theta_i^o dx^1 dx^2 dx^3 \tag{17}$$

是时间不变得量，即是一个守恒量。假设 θ_k^i 在任何地方都是规则的，则积分（17）可以在 $x^0 = 常数$ 扩展到全空间。然后利用高斯定理有：

$$P_i = \frac{1}{16\pi}\iint h_i^{0\alpha} u_\alpha dS \tag{18}$$

这里的 $u_\alpha = \frac{x_i}{r}$ 是一个无限小面元素 dS 向外的的单位法线矢量。

5. 结论

从上述推导和证明中，我们可以清楚的看到 Einstein 为了让能量守恒定律在广义协变方程中得到满足，他把引力的能量贡献也考虑了进去，于是引进一个量 t_i^k，并且通过数学地方法给出了 t_i^k 的表达式 $\sqrt{-g}t_i^k = \frac{1}{16\pi}(\delta_i^k L - \frac{\partial L}{\partial g_{,k}{}^{pq}} g^{pq}{}_{,i})$，这个表达式可以在形式上给出能动量守恒定律，并且给出相应的守恒核 P_i 和 P_0。但是我们也可以看到，t_i^k 并不满足张量的定义，同时并不能满足定义角动量（更甚者不能满足定义引力子自旋），于是虽然 Einstein 得能动量张量表述最为简单，也能在较远空间（接近平直空间的区域）有合理的物理意义[4, 5]，但是并不是真正的协变能动量张量。关于定义真正协变能动量张量的问题，在过去的将近一个世纪，Landau-Lifshitz、Møller、Papapetrou、Weinberg、段一式都分别给出了他们自己定义的能动量张量[6, 7]，可是没有一个定义式得到了广泛的认可。到目前为止，这依然是一个很让人尴尬的问题，值得各位有兴趣的读者继续研究。作为一个可能的解决方法，最近有研究人员给出了关于规范场的一种全新的分解方式[8-10]，并将这种分解应用于在引力场中，构建了引力场的物理分解，解决了引力场规范相关问题，在规范不变的度规张量和联络的基础上，引力场能动量赝张量问题的可以得到解决[4-7]。

References

[1] S. S. Xulu. The Energy-Momentum Problem in General Relativity, arXiv: hep-th/0308070.

[2] H. Nikolic. The trivial solution of the gravitational energy-momentum tensor problem, arXiv: 1407. 8028 (2014).

[3] M. Sharif, Energy-Momentum Distribution: A Crucial Problem in General Relativity [J], Int. J. Mod. Phys.A20:4309, 2005.

[4] Yi-Zen Chu, ransverse-Traceless Gravitational Waves In A Spatially Flat FLRW Universe: Causal Structure from Dimension Reduction [J], Phys. Rev. D 92, 124038 (2015).

[5] D.V. Gal'tsov, E.Yu. Melkumova, P.A. Spirin, Energy-momentum balance in particle - domain wall perforating collision [J], Phys.Rev. D90 (2014) 12, 125024.

[6] José P. Mimoso, Francisco S. N. Lobo, Salvatore Capozziello, Extended Theories of Gravity with Generalized Energy Conditions [J], Journal of Physics: Conference Series 600 (2015) 012047.

[7] Salvatore Capozziello, Francisco S. N. Lobo, José P. Mimoso, Generalized energy conditions in Extended Theories of Gravity [J], Phys. Rev. D 91 : 124019 (2015).

[8] Xiang-Song Chen, Ben-Chao Zhu, Physical decomposition of the gauge and gravitational fields [J], Phys. Rev.D83:084006, 2011.

[9] Xiang-Song Chen, Ben-Chao Zhu, The true radiation gauge for gravity [J], Phys.Rev.D83:061501, 2011.

[10] Ben-Chao Zhu, Xiang-Song Chen, Tensor gauge condition and tensor field decomposition[J], Modern Physics Letters A, Vol. 30, No. 35 (2015) 1550192.

作者简介：郭佳（1986 年—），男，湖北十堰，助理实验师，主要从事医学物理实验教学，广义相对论理论研究．E-mail: 416355087@qq.com