Review and Analysis on Focus in High School Mathematics in America

Feng Tian

School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an, China

fengt@snnu.edu.cn

Keywords: Focus in high school mathematics; Reasoning; Sense making; Frame; America

Abstract. The publication of Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making was marked by NCTM, which captured the direction for high school mathematics for students in the twenty-first century in America. Firstly, the context and the frame were reviewed. Secondly, the contents, the principles and the methods were introduced. Thirdly, the work and the use were described. Finally, combined with the situation of education in high school mathematics in China, some suggestions were proposed.

美国高中数学焦点的研究与启示

田枫

陕西师范大学 数学与信息科学学院, 中国 陕西 西安, 710119

fengt@snnu.edu.cn

摘要: 高中数学焦点是美国数学教师委员会最新发布的指导美国高中数学教育的文件, 勾勒出 21 世纪美国高中数学教育发展的方向. 本文通过梳理与分析高中数学焦点的产生背景、基本构架; 重点介绍推理与意义建构的内涵、原则、方法, 以及不同高中数学领域实施有效推理与意义建构的方法与保障等实质性内容. 最后, 阐述美国高中数学焦点的研究对我国高中数学教育的启示.

关键词: 高中数学焦点; 推理; 意义建构; 构架; 美国

1. 引言

美国数学教师委员会 (The National Council of Teachers of Mathematics, 简称 NCTM) 是一个由美国大学、中学、小学、幼儿园数学教师共同参加的一个民间组织, 尽管是民间组织, 但 NCTM 从 1920 年建立之初就以促进 K-12 年级的数学教学和学习改革为己任, 从 80 年代开始致力于数学课程标准的制订和数学教师的职业化培训, 其卓有成效的工作极大地推动了美国的数学课程改革, 成为美国教育界最具影响力的学科教育和教师教育的专业组织之一 [1]. 2009 年 10 月 6 日, 美国数学教师委员会发布高中数学教育的最新指导文件《高中数学焦点: 推理与意义建构》(Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making, 简称 FHSM). 强调高中数学教学, 不论是统计与概率, 还是代数, 或者几何, 都需要把焦点落在推理与意义建构上 [2].

2. 美国高中数学焦点的产生背景与基本构架

2.1. 产生背景

NCTM 在 1989 年出台美国有史以来的第一个国家性课程标准——《学校数学课程与评价标准》(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics), 提出为全体学生提供共同核心的数学课程, 关注数学问题解决、数学推理、数学关联与数学交流的过程. 2000 年, NCTM 在对 1989 年标准修订的基础上公布《学校数学的原则与标准》(Principles and

Standards for School Mathematics), 把每个学段标准划定为数与运算、代数、几何、测量、数据分析与概率这 5 项内容标准和问题解决、推理与证明、交流、关联、表征这 5 项过程标准. 为了改变美国基础数学教育泛而不精, 对重点数学内容重视不够的情况, NCTM 在 2006 年 9 月 12 日发布《从幼儿园到八年级的数学课程焦点: 寻求一致性》[3] (Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence) 的报告, 具体、明确地给出了各个年级的教学目标, 以及与其它年级课程焦点的联系, 切实帮助州一级和地区一级的数学课程领导者们及数学教师们确定什么是各个阶段最重要的数学内容, 保证所有的学生都有机会深刻地学习最重要的数学内容, 赢得了美国数学界的广泛好评[4]. 所以, 人们期待高中数学课程也有一个类似的数学课程焦点, 为不同年级不同水平的高中生提供高效的数学课程指导. 在这样的背景下, NCTM 成立了一个由数学教育家、高中优秀数学教师、数学家、统计学家等组成的研究组, 历时近三年得到了这份成果[5].

2.2. 基本构架

《美国高中数学焦点》由主报告《高中数学焦点: 推理与意义建构》, 5 个匹配的系列报告《统计与概率中的推理与意义建构》、《代数中的推理与意义建构》、《几何中的推理与意义建构》、《培养全体学生的推理与意义建构》、《技术支撑下的推理与意义建构》, 以及与高中数学教学相关人员的指导文件, 如对教师的指导文件、对学生的指导文件、对家长的指导文件、对教育管理人员的指导文件等构成[6].

与《从幼儿园到八年级的数学课程焦点: 寻求一致性》不同, 《高中数学焦点》通过强调数学课程的重要意义以及有效的教学方法, 将推理与意义建构融入整个高中数学课程之中, 使之成为高中数学教学的基本内容. 除此之外, 《高中数学焦点》提供了大量的案例, 着力解决“如何教”的问题, 保障推理与意义建构在高中数学教学从理念成为现实的可行性, 以达到促进所有学生有机会学会数学推理, 学会对数学的意义建构.

3. 推理与意义建构

NCTM 主席 Henry · S. Kepner Jr. 在《高中数学焦点》中指出[7], 推理与意义建构一直都处于数学的核心位置, 基于推理与意义建构的高中数学课程将为未来大学学习、职场工作, 以及成为合格公民做准备. 推理与意义建构对美国高中数学教学的价值与意义奠定了其贯穿美国高中数学教学主线的地位.

3.1. 推理与意义建构的内涵

推理是指根据证据或既有假定得出逻辑结论的过程. 意义建构是指对数学概念、定理、公式、法则等结合某些情境背景的理解. 体现出推理与意义建构的数学学习, 其层次远高于按照固定的步骤, 重现知识进行数学演算的数学学习, 因为在推理与意义建构中可以建立新旧知识之间的关联, 形成知识结构, 发展思维品质, 促进本质理解, 获得知识迁移.

3.2. 推理与意义建构的原则

《高中数学焦点》提出推理与意义建构的两项基本原则是, 一、将推理贯穿整个高中数学课程; 二、高中数学课程五个内容领域中的重点知识的学习都需要经历意义建构的过程[8].

以问题解决为例, 推理贯穿四个阶段——弄清问题、寻找模型、建立关联、解题反思. 在弄清问题阶段, 明晰问题提示的重要信息、隐性信息、目标; 在寻找模型阶段, 应用以前学过的概念处理问题, 必要时进行特殊化变形, 大胆地猜想得到初步结论; 在建立关联阶段, 在不同的数学领域、不同的背景、不同的表征之间寻找与应用关联; 在解题反思阶段, 检验答案的合理性, 思考其他的解答思路, 对比不同解答思路之间的关系, 进行一般化地推广等. 推理在问题解决的思考过程中需要达到自然而灵活地进行合理转化的高中数学课程目标.

《高中数学焦点》将代数中的重点知识界定为代数符号与函数, 用代数符号进行推理与意义建构包括: 有意义地选择变量, 依据条件建立表达式或方程; 预测结果; 有目的地选择计算方法; 通过等价的逻辑推论审查解题步骤, 根据背景解释答案; 用代数方法解决几何问题, 用几何方法解决代数问题, 建立问题解决过程中的数形结合. 用函数进行推理与意义建构包

括：体现函数的多种表征及灵活转换；根据不同函数的特有性质，为实际问题建立合理的数学模型；分析参数对函数的影响，灵活地选择函数的不同表达形式。

3.3. 推理与意义建构的意义

推理与意义建构是数学能力的核心，将推理与意义建构贯穿为高中数学的主线，渗透到高中数学课程的各个内容，有助于学生发现数学的整体连贯性，建立新旧知识之间的联系，不同数学领域知识之间的联系，加深对数学内容的理解。正如 NCTM 主席 Henry 在《高中数学焦点》中所指出推理与意义建构的价值——为未来大学学习、职场工作，以及成为合格公民做准备，其意义在于一方面它是数学学习的有效方式，另一方面它有助于应对未来的挑战。

4. 推理与意义建构的方法与保障

《高中数学焦点》不仅关注“教什么”，还关注“怎么教”，从两个方面翔实地阐述了推理与意义建构“怎么教”的问题。为实现全体学生创造学习推理与意义建构的方法提供可行性保障[9]。

首先，在主报告中呈现出 22 个课例，详细地剖析数与测量、代数符号、函数、几何、统计与概率中如何进行推理与意义建构的教学。其次，在匹配的 5 项系列报告中，分别结合学科特点，详细地介绍运用数学模型解决实际问题，有效实施推理与意义建构剖析的具体实施方法。

《高中数学焦点》的教学指南附件提出，一方面，课程、教学、评价三者都以发展学生的数学推理与意义建构为共同目标；另一方面，对高中数学教育的所有参与者——教师、学生、教育管理者、政策制定者、家长提出了指导性意见。对于教师，实施推理与意义建构教学，与教师的专业发展相结合，有关于教师长期的专业发展指导与支持；对于学生，指导明确指出在科技迅猛发展的社会，学习高中数学将对他们的未来发展起到重要作用；对于教育管理者，指导要求将评价推理与意义建构作为一项重要的检测指标；对于政策制定者，指导提出要保障适当的财力支持学校与学区；并且还指导家长鼓励和帮助学生认真学习数学，促进子女形成良好的数学学习习惯。通过各个高中数学教育参与者的明确指导，确保推理与意义建构成为高中数学实际教学的焦点。

5. 对我国高中数学教育的启示

我国高中数学教育中存在很多困惑，困惑之一是如何把高中课程标准中的理念实践于课堂，作为教师，除了一套普通高中课程标准实验教科书和教师用书，来自于官方的指导几乎没有，全凭实践者对课程的摸索。比如必修五个模块的教学序，对于使用人教 A 版、人教 B 版、北师大版、苏教版的教师们，在实际的教学中探索出了 1—4—5—2—3 的教学序，因为较之按 1—2—3—4—5 的顺序讲，会衍生出很多问题（湘教版除外，因为湘教版对新课标必修模块的编排与多数教师的实际教学序是一致的）。如在模块 1 中学习的函数奇偶性，其应用在模块 4 的三角函数中才得到体现；如在模块 2 中圆锥、圆台表面积的计算中需要用到扇形公式，如果此时讲过模块 4 的弧度，不仅运算简便，而且体现出弧度学习的价值……，这样的教学困惑还有不少。我国高中数学教育顶层的管理者、设计者能不能也出台类似《高中数学焦点》这样的报告，尤其是关注“怎么教”的问题。

《高中数学焦点》提供的 22 个课例，对“如何教”的问题进行了详细地剖析，有教学重点、推理要求、过程标准、内容标准、任务序列、使用方法、关注思维、评价途径、辅助材料、资源、学生活动表等栏目[10]。特别地，在使用方法与关注思维栏目，预设出种种学生解决问题过程中常见的思维模式，以及应对的教学处理方法，很有操作性。对高中数学教育的所有参与者，《高中数学焦点》的支撑材料中都给出明确的指导意见，保障课程、教学、评价三个维度共同目标的一致性。我国目前的高中新课标实验教科书，如北师大版，其例题、练习、习题普遍存在与高考题难度差距较大的情况，基于这种情况，教学时教科书被忽视，出现师生不重视教科书，不重视知识生成，不重视技术融入课程等问题，出现理想的课程理念

与现实的教学实践有较大出入的问题。因此，我们需要尽快出台类似的权威报告，将课程、教学、评价三者的共同目标相统一，让理想的课程理念与现实的教学实践朝同一个方面努力，产生教育改革的合力。

参考文献

- [1] 龚兵. 美国最大的教师组织——全国教育协会的阶段性发展策略[J]. 学会, 2009(8), p. 23-27. (in Chinese)
- [2] Gail Nord. Reviewed Work: Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making[J]. Mathematics Teacher, Vol. 104(2011), No. 8, p. 636.
- [3] Francis (Skip) Fennell. Curriculum Focal Points for Pre-K-Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence[J]. Teaching Children Mathematics, 2006(10), p. 159.
- [4] 马建生, 苑大勇. 《从学前班到8年级的课程焦点:追求连贯性》报告述评[J]. 比较教育研究, 2007(5), p. 49-51.
- [5] 廖运章. 述评美国高中数学焦点[J]. 数学教育学报, 2013(2), p. 64.
- [6] NCTM. Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making [EB/OL]. http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Focus-in-High-School-Mathematics_Reasoning-and-Sense-Making/,2009-10-06/2016-04-16.

References

- [1] Bing Gong. Nation's Largest Teachers' Organizations - the National Education Association Phased Development Strategy [J].Society,Vol.22(2009),No.1, p.23-27(In Chinese)
- [2] Gail Nord. Reviewed Work: Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making [J].Mathematics Teacher, Vol.104 (2011), No.8, p.636.
- [3] Francis (Skip) Fennell. Curriculum Focal Points for Pre-K-Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence[J].Teaching Children Mathematics,Vol.249(2006),No.10, p.14-16(In Chinese)
- [4] Jiansheng Ma.Report on "Curriculum from kindergarten through Grade 8 Focus: A Quest for Coherence" [J].Comparative Education Review,Vol.204(2007), No.5.,p.49-51(In Chinese)
- [5] LiaoYun Zhang. Review of American High School Mathematics focus [J]. Mathematics Education, Vol.22 (2013), No.1p. 64-69(In Chinese)
- [6] NCTM. Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making [EB/OL]. http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Focus-in-High-School-Mathematics_Reasoning-and-Sense-Making/.2009-10-06/2016-04-16.

作者简介：田枫（1977-），女，河北山海关人，课程与教学论（数学）专业在读博士，研究方向为数学哲学与数学教育。