Pricing European Option under Bi-fractional Jump-Diffusion Process

Xue Hong[1,a*] Wu Jiangzeng[1,b]

[1]School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an, Shan xi, China

[a]xuehonghong@sohu.com, [b]457277707@qq.com,

* Corresponding author

Abstract. Assume that stock price follows the stochastic differential equation driven by the bi-fractional Brownian motion and jump process, the financial mathematical model under bi-fractional jump-diffusion process is built by the stochastic analysis theory of the bi-fractional Brownian motion and jump process. The European option is discussed using the actuarial approach, and the European option pricing formula is obtained.

Keywords： **bi-fractional Brownian motion, jump-diffusion process, European option, actuarial mathematics.**

双分数跳-扩散过程下欧式期权定价

薛红[1,a,*]，吴江增[1,b]

[1]西安工程大学理学院，西安，陕西，中国

[a]xuehonghong@sohu.com， [b]457277707@qq.com

*通讯作者

中文摘要. 假设标的资产价格服从双分数布朗运动和跳过程驱动的随机微分方程，借助双分数布朗运动和跳过程随机分析理论，建立双分数跳-扩散过程下金融市场数学模型，运用保险精算方法研究欧式期权定价问题，获得双分数跳-扩散过程下欧式期权定价公式.

关键词：**双分数布朗运动；跳-扩散过程；欧式期权；保险精算**

1. 引言

期权定价是当今金融市场的热点问题，文献[1]在股票价格遵循几何布朗运动下，获得了欧式期权定价的解析解．近些年来，由于在实际金融市场中股票价格可能会出现跳跃，不少学者考虑用Poisson过程和布朗运动驱动的随机微分方程来描述股票价格的变化并且给出了一些期权价格的解析解[2-3]．同时由于股票价格对过去价格具有依赖性，一些学者考虑用分数布朗运动刻画股票价格的变化[4-6]．文献[7]讨论了分数布朗运动和泊松过程共同驱动下的欧式期权定价问题．文献[8]首次提出期权定价的保险精算方法，该方法将期权定价问题转化为公平保费的确定问题．它不仅对于无套利、均衡、完备的市场有效，且对于有套利、非均衡、不完备的市场也有效．文献[9-11]讨论了双分数布朗运动概念、性质及应用．双分数布朗运动是比分数布朗运动更一般的高斯过程，且具有广泛应用．本文利用由双分数布朗运动和跳过程驱动的

随机微分方程建立金融市场数学模型，利用保险精算的方法和随机分析理论，研究欧式期权定价问题，并给出欧式期权定价公式.

2. 双分数跳-扩散过程下金融数学模型

定义2.1[9] 称高斯过程$\{B_t^{H,K},t\geq 0\}$为双分数布朗运动，如果$E(B_t^{H,K})=B_0^{H,K}=0$，且对$\forall t,s\geq 0$有

$$E[B_t^{H,K}B_s^{H,K}]=\frac{1}{2^K}[(t^{2H}+s^{2H})^K-|t-s|^{2HK}],$$

其中$H\in(0,1),\quad K\in(0,2)$.

当$K=1$时，双分数布朗运动即是参数为$H\in(0,1)$的分数布朗运动；特别地，当$K=1,\ H=\frac{1}{2}$时，双分数布朗运动即是标准布朗运动. 关于双分数布朗运动相关性质和随机分析基本理论见文献[9-11].

假设金融市场有两种资产，一种为无风险资产，另一种为风险资产，其价格分别满足随机微分方程

$$dM_t=rM_tdt, \tag{1}$$

$$dS_t=S_t[\mu dt+\sigma dB_t^{H,K}+(e^{J(t)}-1)dQ_t], \tag{2}$$

其中M_t表示无风险资产价格，S_t表示风险资产价格，μ为风险资产价格的期望收益率，σ为无风险资产的波动率，$\{B_t^{H,K},t\geq 0\}$为定义在完备概率空间(Ω,F,P)上双分数布朗运动，Q_t表示标的资产价格在时间区间$[0,t]$内随机跳跃次数，且$\{Q_t,t\geq 0\}$服从参数为λ的Poisson过程，$\{J(t_i),i\geq 1\}$为独立同分布序列，且$J(t_i)\sim N(-\frac{\sigma_J^2}{2},\sigma_J^2)$，$e^{J(t_i)}-1$表示标的资产价格在时刻$t_i$的相对跳跃幅度，并且假定$\{B_t^{H,K},t\geq 0\}$，$\{Q_t,t\geq 0\}$，$\{J(t_i),i\geq 1\}$相互独立.

引理2.2 随机微分方程(2)的解为

$$S_t=S_0\exp\{\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^{2HK}+\sigma B_t^{H,K}+\sum_{i=1}^{Q_t}J(t_i)\}.$$

证明：当在$[0,t]$内没有发生跳跃时，由双分数*Ito*公式可得

$$S_t=S_0\exp\{\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^{2HK}+\sigma B_t^{H,K}\},$$

假定在$t_1\in[0,t]$时刻内只发生一次跳跃，则在时刻$[0,t_1)$内有

$$S_{t_1^-}=S_0\exp\{\mu t_1-\frac{1}{2}\sigma^2t_1^{2HK}+\sigma B_{t_1}^{H,K}\},$$

同理在时刻区间$(t_1,t]$内有

$$S_t=S_{t_1}\exp\{\mu(t-t_1)-\frac{1}{2}\sigma^2(t^{2HK}-t_1^{2HK})+\sigma(B_t^{H,K}-B_{t_1}^{H,K})\},$$

由式(2)有

$$S_{t_1}-S_{t_1-\frac{1}{n}}=\mu\int_{t_1-\frac{1}{n}}^{t_1}S_{u-}du+\sigma\int_{t_1-\frac{1}{n}}^{t_1}S_{u-}dB_u^{H,K}u+\int_{t_1-\frac{1}{n}}^{t_1}(e^{J(u)}-1)S_{u-}dQ_u,$$

当$n\to+\infty$时，可得$S_t-S_{t_1^-}=S_{t_1^-}(e^{J(t_1)}-1)$，所以

$$S_t=S_0\exp\{\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^{2HK}+\sigma B_t^{H,K}+J(t_1)\}.$$

当跳跃次数服从Poisson过程时，可得

$$S_t=S_0\exp\{\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^{2HK}+\sigma B_t^{H,K}+\sum_{i=1}^{Q_t}J(t_i)\}.$$

定义2.3[8] 价格过程$\{S_t,t\geq 0\}$在$[0,t]$时间段内的期望收益率β_u，$u\in[0,t]$定义为

$$\exp\{\int_0^t\beta_udu\}=\frac{E[S_t]}{S_0}.$$

引理2.4 $\{S_t,t\geq 0\}$在$[t,T]$上的期望收益率为$\beta_u=\mu,\quad u\in[0,t]$.

证明 由引理2.2知

$$E[S_t]=S_0E[\exp\{\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^{2HK}+\sigma B_t^{H,K}+\sum_{i=1}^{Q_t}J(T_i)\}]=S_0\exp\{\mu t\},$$

从而可得结果.

3. 欧式期权定价公式

考虑在到期日为T，执行价格为X的欧式看涨期权，其到期日的损益为

$$V_T=(S_T-X)^+.$$

定义3.1[8] 欧式期权保险精算价格定义为

$$c = E[S_T \exp\{-\beta T\} I_{\{\exp\{-\beta T\}S_T > \exp\{-rT\}X\}} - X\exp\{-rT\} I_{\{\exp\{-\beta T\}S_T > \exp\{-rT\}X\}}\}],$$

其中风险资产按期望收益率折现，无风险资产按无风险利率折现.

定理3.2 欧式期权保险精算价格

$$c = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^m}{m!}\{S_0 N(d_1^{(m)}) - X\exp\{-rT\}N(d_2^{(m)})\},$$

其中 $N(x)$ 为标准正态分布函数，且

$$d_1^{(m)} = \frac{\ln(S_0/X) + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2HK} + \frac{1}{2}m\sigma_J^2}{\sqrt{\sigma^2 T^{2HK} + m\sigma_J^2}},$$

$$d_2^{(m)} = d_1^{(m)} - \sqrt{\sigma^2 T^{2HK} + m\sigma_J^2}.$$

证明 假设在时间区间 $[0,T]$ 内发生 m 次跳跃 $J(i)$，$i = 1, 2\cdots m$. 由于

$$\xi = \frac{\{\sigma B_T^{H,K} + \sum_{i=1}^{m} J(i) + m\sigma_J^2/2\}}{\sqrt{\sigma^2 T^{2HK} + m\sigma_J^2}} \sim N(0,1),$$

$$\{S_T \exp\{-\beta T\} > X\exp\{-rT\}\} = \{\xi > -d_2^{(m)}\},$$

$$S_T = S_0 \exp\{\mu T - \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2HK} - \frac{1}{2}m\sigma_J^2 + \sqrt{\sigma^2 T^{2HK} + m\sigma_J^2}\,\xi\},$$

则

$$\begin{aligned} c &= E\{\{S_T \exp\{-\mu T\} - X\exp\{-rT\}\} I_{\{\xi > -d_2^{(m)}\}}\} \\ &= E\{E\{\{S_T \exp\{-\mu T\} - X\exp\{-rT\}\} I_{\{\xi > -d_2^{(m)}\}} \mid Q_T\}\} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^m}{m!}\{E\{S_T \exp\{-\mu T\} I_{\{\xi > -d_2^{(m)}\}} \mid Q_T = m\} \\ &\quad - X\exp\{-rT\} E\{I_{\{\xi > -d_2^{(m)}\}} \mid Q_T = m\}\} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^m}{m!}(V_1 - V_2), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} V_1 &= E\{S_T \exp\{-\mu T\} I_{\{\xi > -d_2^{(m)}\}} \mid Q_T = m\} \\ &= E\{S_0 \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2 T^{2HK} - \frac{1}{2}m\sigma_J^2 + \sqrt{\sigma^2 T^{2HK} + m\sigma_J^2}\,\xi\} I_{\{\xi > -d_2^{(m)}\}}\} \\ &= E\{S_0 \int_{-d_2^{(m)}}^{+\infty} \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2 T^{2HK} - \frac{1}{2}m\sigma_J^2 + \sqrt{\sigma^2 T^{2HK} + m\sigma_J^2}\,u\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{u^2}{2}\} du \\ &= S_0 N(d_1^{(m)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= X\exp\{-rT\} E\{I_{\{\xi > -d_2^{(m)}\}} \mid Q_T = m\} \\ &= X\exp\{-rT\} P\{\xi > -d_2^{(m)}\} \\ &= X\exp\{-rT\} N(d_2^{(m)}). \end{aligned}$$

注3.3 (1) 当 λ=0 时，可得双分数布朗运动环境下欧式期权定价公式. 特别地，当 $K = 1$时，可得分数布朗运动环境下欧式期权定价公式（见文献[5]）.

(2) 当 $K = 1$时，可得分数跳-扩散过程下欧式期权定价公式（见文献[7]）.

4.结束语

本文通过建立双分数跳-扩散金融市场数学模型，利用随机分析理论以及保险精算的方法讨论了双分数跳-扩散过程下欧式期权定价，推导出了更一般情况下的欧式期权定价公式，对于金融市场的变化研究具有重要意义。

致谢

本文为陕西省教育厅自然科学专项基金项目（12JK0862）阶段性成果之一.

References

[1] F. Black, M. Seholes .The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, vol.81, pp. 637-654, 1973.

[2] J. G. Zhao, G . Shi. The Option Pricing of the Stock Driven by Jump-Diffusion , *Journal of Xinjiang University* (*Natural Science Edition*), vol.23, pp.166-169, 2006.

[3] L. J. Ning, X. P. Liu. Option pricing model when stock pricing process is a jump-diffusion process, *Journal of Shaanxi Normal University* (*Natural Science Editon*) , vol.31, pp.16-19, 2003.

[4] F. Biagini , Y. Hu , Oksendal B , Zhang T. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications, *Springer*, 2008 .

[5] R. J. Elliott, J. Hoek. A general fractional white noise theory and applications to finance, *Mathematical Finance*, vol. 13, pp. 301-330, 2003.

[6] H. Xue, L. X. Wang. Pricing of maximum or minimum option in the fractional Brownian motion environment, C*hinese Journal of Engineering Mathematics*, vol. 25, pp. 843-850, 2008.

[7] M. Z. Sui, Y. Q. Zhang. An actuarial pricing options on stocks driven by fractional Brownian motion and Poisson jump process, J*ournal of Shandong Jianzhu University*, vol.23, pp.70-73, 2008.

[8] M. T. Bladt, H. Rydberg. An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions, Insurance: *Mathematic and Economies*, vol. 22, pp. 65-73, 1998.

[9] F. Russo, C. Tudor. On the bifractional Brownian motion, *Stochastic Processes and Applications*, vol.116, pp.830-856, 2006.

[10] K. Es-sebaiy, C. Tudor. Multidimensional bifractional Brownian motion: Ito and Tanaka formulas, *Stochastics and Dynamics*, vol.7, pp. 365-388, 2007.

[11] W. L. Xiao, W. G. Zhang, W. D. Xu. Pricing equity warrants in a bifractional Brownian motion, J*ournal of Systems Engineering*, vol.28, pp. 348-354, 2013.